Soluzioni dell'esame di GEOMETRIA B - prof. Lucia Alessandrini - 20 gennaio 2009

PRIMO TEMA

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(V) Le traslazioni non sono applicazioni lineari.

(F) Se b è una forma bilineare simmetrica non degenere rappresentata in base canonica dalla matrice A, allora $detA > 0$.

(V) $\mathbb{Z}_{11}$ è un campo.

(F) Un operatore su $\mathbb{C}^2$ ha sempre due autovettori linearmente indipendenti.

(V) La funzione $x(t) = 2\sin t - \cos t$ risolve l'equazione differenziale $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x(t)$.

(V) Esistono matrici unitarie $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ con $detA = i$.

(V) Se $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ è una applicazione lineare suriettiva, allora $KerL$ non è formato solo dal vettore nullo.

(V) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

Risolvere per esteso su questo foglio.

1. Siano $P, M \in GL(n, \mathbb{R})$ tali che $M = ({}^tP)P$.
a) Dimostrare che M rappresenta una forma bilineare simmetrica, e che questa è definita positiva.
b) Se $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, può esistere P come sopra?
SOLUZIONE. a) Vedi esempio in 6.6 del libro Geometria B.
b) No, poiche' da a) M dovrebbe essere definita positiva, mentre $det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} < 0$.

2. Sia $G = \{A = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ z_j \in \mathbb{C}\}$.
a) Dimostrare che G è sottogruppo di $GL(3, \mathbb{C})$.
b) Sia $f : G \to (\mathbb{C}, +, 0)$ data da $f(A) = z_1 + z_2 - z_3$. Dire se f è un omomorfismo di gruppi.
SOLUZIONE. a) $I_3 \in G$ per definizione. Se $A, B \in G$, vale $A = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & w_1 & w_3 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e dunque $AB = \begin{pmatrix} 1 & z_1 + w_1 & z_3 + w_3 + z_1w_2 \\ 0 & 1 & z_2 + w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Inoltre anche $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -z_1 & z_1z_2 - z_3 \\ 0 & 1 & -z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
b) f non è un omomorfismo di gruppi poiche' $f(AB) = z_1 + w_1 + z_2 + w_2 - (z_3 + w_3 + z_1w_2)$ mentre $f(A) + f(B) = z_1 + w_1 + z_2 + w_2 - z_3 - w_3$.

3. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore dato da $L(x, y, z) = (2x - y, -x + y + z, y + 2z)$.
a) Determinare gli autovalori di L e i relativi autospazi. L è diagonalizzabile?
b) Determinare la matrice di L rispetto alla base $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ su $\mathbb{R}^3$.
SOLUZIONE. a) Gli autovalori sono 3,2,0: essi sono distinti e dunque L è diagonalizzabile. Gli autospazi sono: $V_3 = \{(-x, x, x)\}, V_2 = \{(x, 0, x)\}, V_0 = \{(x, 2x, -x)\}$.

b) La matrice richiesta è $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Studiare la quadrica di equazione $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$.

SOLUZIONE. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, per cui $rgA = 3, rgM = 4$. Inoltre $|pos - neg| = 3$.

La traslazione si fa ponendo $u = 1, v = 0, w = -1/3$, dunque risulta $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$.

La quadrica è un ellissoide.

SECONDO TEMA

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(V) La funzione $x(t) = 2\sin t + \cos t$ risolve l'equazione differenziale $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x(t)$.

(F) Esistono matrici unitarie $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ con $detA = 1 + i$.

(F) Se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una applicazione lineare suriettiva, allora $KerL$ non è formato solo dal vettore nullo.

(V) Le traslazioni non sono applicazioni lineari.

(F) Se b è una forma bilineare simmetrica non degenere rappresentata in base canonica dalla matrice A, allora $detA > 0$.

(F) $\mathbb{Z}_9$ è un campo.

(F) Un operatore su $\mathbb{C}^2$ ha sempre due autovettori linearmente indipendenti.

(F) Ogni matrice normale è invertibile.

Risolvere per esteso su questo foglio.

1. Sia $G = \{A = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ z_j \in \mathbb{C}\}$.

a) Dimostrare che G è sottogruppo di $GL(3, \mathbb{C})$.

b) Sia $f : G \to (\mathbb{C}, +, 0)$ data da $f(A) = z_1 + z_2$. Dire se f è un omomorfismo di gruppi.

SOLUZIONE. a) $I_3 \in G$ per definizione. Se $A, B \in G$, vale $A = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & w_1 & w_3 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e dunque $AB = \begin{pmatrix} 1 & z_1 + w_1 & z_3 + w_3 + z_1 w_2 \\ 0 & 1 & z_2 + w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Inoltre anche $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -z_1 & z_1 z_2 - z_3 \\ 0 & 1 & -z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

b) f è un omomorfismo di gruppi poiche' $f(AB) = z_1 + w_1 + z_2 + w_2 = f(A) + f(B)$.

2. Siano $P, M \in GL(n, \mathbb{R})$ tali che $M = ({}^tP)P$.

a) Dimostrare che M rappresenta una forma bilineare simmetrica, e che questa è definita positiva.

b) Se $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, può esistere P come sopra?

SOLUZIONE. a) Vedi esempio in 6.6 del libro Geometria B.

b) No, poiche' da a) M dovrebbe essere definita positiva, mentre $det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} < 0$.

3. Studiare la quadrica di equazione $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x + 2z = 0$.

SOLUZIONE. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, per cui $rgA = 3, rgM = 4$. Inoltre $|pos - neg| = 3$.

La traslazione si fa ponendo $u = 1, v = 0, w = -1/3$, dunque risulta $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4/3 \end{pmatrix}$.

La quadrica è un ellissoide.

4. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore dato da $L(x, y, z) = (2x - y, -x + y + z, y + 2z)$.

a) Determinare gli autovalori di L e i relativi autospazi. L è diagonalizzabile?

b) Determinare la matrice di L rispetto alla base $\mathcal{B} = ((-1, 1, 1), (1, -1, 0), (2, 0, 0))$ su $\mathbb{R}^3$.

SOLUZIONE. a) Gli autovalori sono 3,2,0: essi sono distinti e dunque L è diagonalizzabile. Gli autospazi sono: $V_3 = \{(-x, x, x)\}, V_2 = \{(x, 0, x)\}, V_0 = \{(x, 2x, -x)\}$.

b) La matrice richiesta è $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.