Soluzione dell'esame di GEOMETRIA B - prof. Lucia Alessandrini - 11 febbraio 2009

PRIMO TEMA

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(F) La quadrica di equazione $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 1 = 0$ è un ellissoide.

(F) Se $<,>$ è il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$, allora $< (i, i, 0, i), (0, i, 1, i) >= 0$.

(V) La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

(F) Sia $A \in O(n)$: allora $detA \neq 1$.

(F) L'applicazione $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ è lineare.

(V) Se tre vettori di $\mathbb{R}_2[t]$ non generano $\mathbb{R}_2[t]$, allora sono linearmente dipendenti.

(F) Se A e B sono due matrici normali, anche AB è normale.

(V) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di un operatore T, allora λ^3 è radice del polinomio caratteristico di T^3.

Risolvere per esteso su questo foglio.

1. a) Scrivere un elemento non nullo ma non invertibile (rispetto al prodotto) di $\mathbb{Z}_8$.
b) Trovare tutti gli elementi $\overline{x} \in \mathbb{Z}_7$ che risolvono l'equazione $\overline{2}\overline{x} = \overline{5}$.
c) Trovare tutti gli elementi $\overline{x} \in \mathbb{Z}_8$ che risolvono l'equazione $\overline{2}\overline{x} = \overline{5}$.

SOLUZIONE. a) Per esempio $\overline{2}$: basta scrivere la sua riga nella tabella di moltiplicazione di $\mathbb{Z}_8$ e notare che non compare mai l'elemento neutro (tutti i pari escluso lo zero vanno bene).
b) L'unica soluzione è $\overline{6}$: infatti $2x - 5 = 7k$ non ha altre soluzioni intere.
c) Non ci sono soluzioni, infatti $2x - 5 = 8k$ non ha soluzioni intere.

2. Sia f la forma bilineare su $\mathbb{R}^4$ rappresentata da $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Dire se A è congruente a una matrice diagonale, e giustificare la risposta.
b) Se W è il sottospazio generato da $(1, 2, 2, 1)$ e $(1, 0, 1, 0)$, determinare $W^\perp$ (rispetto a f) e la sua dimensione.

SOLUZIONE. a) A è simmetrica, e dunque è congruente a una matrice diagonale.
b) $W^\perp = \{(x, y, z, t)/2x + 3y + 4z + 7t = 0, 2x + z + 2t = 0\}$ e la sua dimensione è 2.

3. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi canoniche.
a) L è iniettiva? L è suriettiva? Giustificare le risposte.
b) Scrivere l'operatore associato alla matrice $({}^tA)A$ e dire se esso è diagonalizzabile.

SOLUZIONE. a) $rgA = 2$ dunque $dimKerL = 0$, perciò L è iniettiva. Dal teorema di nullità più rango, non può essere suriettiva.
b) L'operatore cercato è $T(x, y) = (10x+14y, 14x+20y)$; esso è diagonalizzabile perche' la matrice $({}^tA)A$ è simmetrica.

4. a) Dimostrare che una matrice 2×2 con elementi positivi ha sempre autovalori.
b) Dimostrare poi che essa è sempre diagonalizzabile.
c) Valgono a) e b) se un elemento è nullo e gli altri sono positivi?

SOLUZIONE. a) e b) Consideriamo la matrice a elementi positivi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è $p(t) = (a-t)(d-t) - bc = t^2 - t(a+d) + (ad-bc)$. Il discriminante dell'equazione è $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc > 0$, dunque ci sono due soluzioni reali distinte, che sono gli autovalori, e la matrice è diagonalizzabile.

c) Se un elemento è nullo, vale comunque $\Delta \geq 0$ perciò a) vale; ma se b oppure c sono zero, e $a = d$, risulta $\Delta = 0$ dunque i due autovalori coincidono: per esempio, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

SECONDO TEMA

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(V) La quadrica di equazione $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$ è un ellissoide.

(F) Se $<,>$ è il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$, allora $<(i,i,0,i),(0,i,1,i)>= -1$.

(F) L'applicazione $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = x + y + z + 1$ è lineare.

(V) Se quattro vettori di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ non generano $M(2 \times 2, \mathbb{R})$, allora sono linearmente dipendenti.

(F) La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

(F) Sia $A \in O(n)$: allora $det A = 1$.

(F) Se A e B sono due matrici hermitiane, anche AB è hermitiana.

(V) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di un operatore T invertibile, allora $\lambda \neq 0$.

Risolvere per esteso su questo foglio.

1. Sia f la forma bilineare su $\mathbb{R}^4$ rappresentata da $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Dire se A è congruente a una matrice diagonale, e giustificare la risposta.
b) Se W è il sottospazio generato da $(1,2,2,1)$ e $(2,4,4,2)$, determinare $W^\perp$ (rispetto a f) e la sua dimensione.

SOLUZIONE. a) A è simmetrica, e dunque è congruente a una matrice diagonale.
b) I due vettori sono dipendenti, dunque $W = \mathcal{L}((1,2,2,1))$; perciò $W^\perp = \{(x,y,z,t)/2x + 3y + 4z + 7t = 0\}$ e la sua dimensione è 3.

2. a) Scrivere un elemento non nullo ma non invertibile (rispetto al prodotto) di $\mathbb{Z}_6$.
b) Trovare tutti gli elementi $\overline{x} \in \mathbb{Z}_7$ che risolvono l'equazione $\overline{2}\overline{x} = \overline{5}$.
c) Trovare tutti gli elementi $\overline{x} \in \mathbb{Z}_6$ che risolvono l'equazione $\overline{2}\overline{x} = \overline{5}$.

SOLUZIONE. a) Per esempio $\overline{2}$: basta scrivere la sua riga nella tabella di moltiplicazione di $\mathbb{Z}_6$ e notare che non compare mai l'elemento neutro (tutti i pari escluso lo zero vanno bene).
b) L'unica soluzione è $\overline{6}$: infatti $2x - 5 = 7k$ non ha altre soluzioni intere.
c) Non ci sono soluzioni, infatti $2x - 5 = 6k$ non ha soluzioni intere.

3. a) Dimostrare che una matrice 2×2 con elementi positivi ha sempre autovalori.
b) Dimostrare poi che essa è sempre diagonalizzabile.
c) Valgono a) e b) se un elemento è nullo e gli altri sono positivi?

SOLUZIONE. a) e b) Consideriamo la matrice a elementi positivi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è $p(t) = (a-t)(d-t) - bc = t^2 - t(a+d) + (ad-bc)$. Il discriminante dell'equazione è $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc > 0$, dunque ci sono due soluzioni reali distinte, che sono gli autovalori, e la matrice è diagonalizzabile.
c) Se un elemento è nullo, vale comunque $\Delta \geq 0$ perciò a) vale; ma se b oppure c sono zero, e $a = d$, risulta $\Delta = 0$ dunque i due autovalori coincidono: per esempio, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

4. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi canoniche.
a) L è iniettiva? L è suriettiva? Giustificare le risposte.
b) Scrivere l'operatore associato alla matrice $A({}^tA)$ e dire se esso è diagonalizzabile.

SOLUZIONE. a) $rgA = 2$ dunque $dimKerL = 0$, perciò L è iniettiva. Dal teorema di nullità più rango, non può essere suriettiva.
b) L'operatore cercato è $T(x, y, z) = (5x + 11y, 11x + 25y, 0)$; esso è diagonalizzabile perche' la matrice $A({}^tA)$ è simmetrica.