Soluzioni dell'esame di GEOMETRIA A - prof. L. Alessandrini, prof. L. Biliotti - 11.02.2009

PRIMO TEMA

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Siano $v = (1, -2, 7)$, $w = (8, 0, 9)$. La distanza fra v e w è $\boxed{\sqrt{57}}$.
$\{v - w\}^{\perp} = \boxed{\{(x, y, z)/7x + 2y + 2z = 0\}}$. Completare a base di $\mathbb{R}^3$ i vettori v e w $\boxed{v, w, e_1}$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. L'applicazione lineare L_A associata ad A è
$L_A(x, y, z, t) = \boxed{(y + 2z + t, x - y + 5t, x + y + 4z + 7t)}$.
$\mathrm{rg}(A) = \boxed{2}$. Un vettore non nullo (se esiste) di $\mathrm{Ker}L_A$ è $\boxed{(0, 5, -3, 1)}$.

3. Siano $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (1, 0, 1)$, $P_3 = (2, 2, 1)$. La retta passante per P_1 e $P_2 - 2P_1$ (equazione parametrica) è $\boxed{(1, 1, 1) + t(-2, -3, -2)}$. Un piano passante per P_1, P_2 e P_3 è $\boxed{z = 1}$. Un piano passante per P_3 e ortogonale alla retta passante per l'origine e di direzione $4P_1 - 2P_3$ è $\boxed{z = 1}$.

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(F) Due rette incidenti non sono contenute in uno stesso piano.

(F) Ogni matrice triangolare superiore è diagonalizzabile.

(V) L'angolo tra $v = (1, 1, 1)$ e $w = (1, -2, 9)$ è minore di un angolo retto.

(V) Se $v, w \in \mathbb{R}^3$, allora $v \times w$ è ortogonale a v.

(F) L'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ è la base canonica.

(V) Una matrice A è non singolare se e solo se $\det(A^3) \neq 0$.

(V) L'equazione $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ rappresenta un ellissoide.

(F) La traccia di una matrice simmetrica è non negativa.

Risolvere per esteso sul retro di questo foglio.

1. a) Scrivere la definizione di matrice invertibile.
b) Siano A e B matrici quadrate. Dimostrare che se la matrice AB^2 è invertibile, allora anche A è invertibile.
SOLUZIONE. a) vedi definizione 6.4 del libro Geometria A.
b) AB^2 è invertibile, dunque il suo determinante è diverso da zero; se A non fosse invertibile, il suo determinante sarebbe zero e dunque $det(AB^2) = (detA)(detB^2) = 0$, assurdo.

2. a) Scrivere la definizione di autovettore di un operatore lineare T.
b) Sia A una matrice invertibile. Dimostrare che se $Av = \lambda v$, allora $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$.
SOLUZIONE. a) vedi definizione 13.3 del libro Geometria A.
b) Dato che A è invertibile,
$Av = \lambda v \iff A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \iff v = \lambda A^{-1}v \iff A^{-1}v = \lambda^{-1}v.$

SECONDO TEMA

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Siano $v = (3, -1, 5)$, $w = (7, 1, 9)$. La distanza fra v e w è $\boxed{6}$.
$\{v - w\}^{\perp} = \boxed{\{(x, y, z)/4x + 2y + 4z = 0\}}$. Completare a base di $\mathbb{R}^3$ i vettori v e w $\boxed{v, w, e_1}$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 11 \end{pmatrix}$. L'applicazione lineare L_A associata ad A è

$L_A(x, y, z, t) = \boxed{(x + 2y + 3t, y + z + t, 4x + 7y - z + 11t)}$.

$\text{rg}(A) = \boxed{2}$. Un vettore non nullo (se esiste) di $\text{Ker}L_A$ è $\boxed{(0, -3, 1, 2)}$.

3. Siano $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (1, 0, 1)$, $P_3 = (2, 2, 1)$. La retta passante per P_1 e $P_2 - P_1$ (equazione parametrica) è $\boxed{(1, 1, 1) + t(-1, -2, -1)}$. Un piano passante per P_1, $2P_2$ e P_3 è $\boxed{x - y - 2z + 2 = 0}$. Un piano passante per P_3 e ortogonale alla retta passante per l'origine e di direzione $2P_1 - 4P_3$ è $\boxed{3x + 3y + z = 13}$.

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

- (V) L'angolo tra $v = (1, 1, 1)$ e $w = (1, -2, 9)$ è minore di un angolo retto.
- (F) Ogni matrice triangolare inferiore è diagonalizzabile.
- (V) Se $v, w \in \mathbb{R}^3$, allora $v \times w$ è ortogonale a w.
- (F) La traccia di una matrice simmetrica è non negativa.
- (V) Una matrice A è non singolare se e solo se $\det(A^5) \neq 0$.
- (F) Due rette incidenti non sono contenute in uno stesso piano.
- (F) L'equazione $x^2 + 2y^2 + z^2 = -1$ rappresenta un ellissoide.
- (F) L'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ è la base canonica.

Risolvere per esteso sul retro di questo foglio.

1. a) Scrivere la definizione di autovettore di un operatore lineare T.
b) Sia A una matrice invertibile. Dimostrare che se $Av = \lambda v$, allora $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$.
SOLUZIONE. a) vedi definizione 13.3 del libro Geometria A.
b) Dato che A è invertibile,
$Av = \lambda v \iff A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \iff v = \lambda A^{-1}v \iff A^{-1}v = \lambda^{-1}v.$

2. a) Scrivere la definizione di matrice invertibile.
b) Siano A e B matrici quadrate. Dimostrare che se la matrice A^2B è invertibile, allora anche A è invertibile.
SOLUZIONE. a) vedi definizione 6.4 del libro Geometria A.
b) A^2B è invertibile, dunque il suo determinante è diverso da zero; se A non fosse invertibile, il suo determinante sarebbe zero e dunque $det(A^2B) = (detA)^2(detB) = 0$, assurdo.