Svolgimento dell'esame di GEOMETRIA A - prof. L. Alessandrini, prof. L. Biliotti - 8.01.2009

PRIMO TEMA

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Consideriamo la retta r di equazione: $\begin{cases} x+y-2z &= 1 \\ x-y+4z &= 3 \end{cases}$ e i piani α di equazione $2x+y-z=0$ e β di equazione $x+y+z=1$. r e α sono (mutua posizione) $\boxed{\textit{paralleli}}$. Le rette r e $\alpha \cap \beta$ sono (mutua posizione) $\boxed{\textit{sghembe}}$. Una equazione parametrica vettoriale del piano β è $\boxed{(1,0,0)+s(-1,1,0)+t(-1,0,1)}$.

2. Considerare l'operatore su $\mathbb{R}^2$ dato dalla formula $L(x,y) = ((5/2)x - (3/4)y, x + (1/2)y)$. La matrice che rappresenta L è $\begin{pmatrix} 5/2 & -3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di L sono $\boxed{1 \text{ e } 2}$. Una base di $\mathbb{R}^2$ costitutita da autovettori di L (se esiste) è $\boxed{(3,2),(1,2)}$.

3. Sia L l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Scrivere la formula per L $\boxed{L(x,y) = (x+2y, x+y, 2x+2y)}$. KerL = $\boxed{O}$. ImL = $\boxed{\mathcal{L}((1,1,2),(2,1,2))}$.

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(F) Sia $v \in \mathbb{R}^3$. L'applicazione $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ L(w) = \| v \times w \|$ è lineare.

(V) $\mathbb{R}^5$ può avere 5 generatori.

(V) Un sistema omogeneo di 8 equazione in 12 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da almeno 4 parametri.

(F) W è un sottospazio vettoriale se $\forall v, w \in W$, anche $v + w \in W$.

(F) Una matrice ortogonale 2×2 rappresenta una rotazione del piano.

(F) Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ è iniettiva se e solo se $\operatorname{rg} M_L \neq 2$.

(V) Sia $\mathcal{B} = \big((1,2),(0,-1)\big)$ una base di $\mathbb{R}^2$. Allora $[(1,2)]_{\mathcal{B}} = (1,0)$.

(F) Nessuna matrice simmetrica è diagonalizzabile.

1. a) Scrivere la definizione di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$.
b) Dimostrare che se un'applicazione lineare L è iniettiva, allora trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.
SOLUZIONE: confronta il libro di testo Geometria A definizione 8.4 e Problema 10.

2. a) Scrivere la definizione di applicazione lineare.
b) Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita come $L(x,y,z) = (x, x+y, x+y+2z)$: Dimostrare che L è un'applicazione lineare invertibile.
SOLUZIONE: a) confronta il libro di testo Geometria A definizione 11.1.
b) La matrice che ha nelle colonne $L(e_1), L(e_2), L(e_3)$ è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dato che vale $A(x,y,z)^T = L(x,y,z)$, l'applicazione L è lineare. Dato che A è invertibile perche' il suo determinante è 2, anche L è invertibile.

SECONDO TEMA

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Consideriamo la retta r di equazione: $\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ -y+2z &= 1 \end{cases}$ e i piani α di equazione $x-y+5z=1$ e β di equazione $y+z=1$. r e α sono (mutua posizione) $\boxed{\textit{parallele}}$. Le rette r e $\alpha \cap \beta$ sono (mutua posizione) $\boxed{\textit{sghembe}}$. Una equazione parametrica vettoriale del piano β è $\boxed{(0,1,0)+s(1,0,0)+t(0,-1,1)}$.

2. Considerare l'operatore su $\mathbb{R}^2$ dato dalla formula $L(x,y)=(2x+3y,-x-2y)$. La matrice che rappresenta L è $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di L sono $\boxed{1,-1}$. Una base di $\mathbb{R}^2$ costitutita da autovettori di L (se esiste) è $\boxed{(-3,1),(1,-1)}$.

3. Sia L l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Scrivere la formula per L $\boxed{L(x,y)=(x+2y,2x+y,x+y)}$. KerL $=\boxed{O}$. ImL $=\boxed{\mathcal{L}((1,2,1),(2,1,1))}$.

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(V) Sia $v \in \mathbb{R}^3$. L'applicazione $L:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(w)=v \times w$ è lineare.

(F) Sia A una matrice quadrata e sia S una sua riduzione a scala. Allora $\det(A)=\det(S)$.

(F) Un sistema omogeneo di 5 equazione in 9 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da esattamente 4 parametri.

(F) W è un sottospazio vettoriale se $\forall v \in W$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, si ha anche $\lambda v \in W$.

(F) Una matrice ortogonale 2×2 ha determinante positivo.

(V) Un'applicazione lineare da $L:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ è iniettiva se e solo se $\operatorname{rg} M_L = 5$.

(V) Siano $v, w \in \mathbb{R}^6$ linearmente indipendenti. Allora $v+w, v-4w$ sono vettori linearmente indipendenti.

(F) Nessuna matrice simmetrica è diagonalizzabile.

1. Scrivere la definizione di base di $\mathbb{R}^n$. Sia $L:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Dimostrare che se $v_1,\ldots,v_n$ sono una base di $\mathbb{R}^n$, allora $L(v_1),\ldots,L(v_n)$ generano ImL.
SOLUZIONE: confronta il libro di testo Geometria A definizione 8.7 e Problema 10.

2. Scrivere la definizione di coordinate di un vettore rispetto ad una base. Sia $\mathcal{B}=\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Calcolare $\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C})$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica.
SOLUZIONE: a) Confronta il libro di testo Geometria A 8.10.
b) $\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

TERZO TEMA

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Consideriamo le rette r di equazione: $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ y-2z &= 4 \end{cases}$ e s di equazione $\begin{cases} y+3z &= 4 \\ x+2y+2z &= k \end{cases}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. I valori di $k \in \mathbb{R}$ (se esistono) per i quali r, s sono complanari sono $\boxed{k=5}$. I vettori direzione delle rette r ed s sono linearmente dipendenti? $\boxed{no}$ Completare a base di $\mathbb{R}^3$ i vettori direzione di r e s $\boxed{(-3,2,1),(4,-3,1),(1,0,0)}$.

2. Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ data da $L(x,y,z) = (x+y, 2x+3y+z, y+z, -2x-2y)$. $\text{rg}(M_L) = \boxed{2}$. KerL $= \boxed{(x,-x,x)}$. Im$L = \boxed{\mathcal{L}((1,2,0,-2),(1,3,1,-2))}$.

3. Sia L l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Scrivere la formula per L $\boxed{L(x,y,z) = (x-z, y+z, x+y)}$. Gli autovalori di L sono $\boxed{0 \ e \ 1}$. L è diagonalizzabile? $\boxed{no}$.

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(V) Siano $v, w \in \mathbb{R}^6$ linearmente indipendenti. Allora $v+w, v+4w$ sono vettori linearmente indipendenti.

(F) Una matrice ortogonale 2×2 ha determinante non negativo.

(V) Un sistema di 5 equazione in 9 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da almeno 4 parametri.

(F) Le coordinate di $v = (3,4)$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \big((1,2),(-1,-3)\big)$ di $\mathbb{R}^2$ sono $(2,2)$.

(F) Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Allora $\text{rg}(A) \geq n$.

(V) Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ può essere suriettiva.

(F) Ogni applicazione lineare $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ è un isomorfismo.

(F) Le matrici di rotazioni del piano sono diagonalizzabili.

1. a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, dire quando il sistema $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x+y-z &= 0 \\ x-kz &= k \end{cases}$ è risolubile e quando possibile scrivere le soluzioni in funzione di k.

SOLUZIONE: il sistema è risolubile e ha soluzione unica per $k \neq 2$. La soluzione in questo caso è $(2\frac{k+1}{2-k} - 1, 2 - 3\frac{k+1}{2-k}, \frac{k+1}{2-k})$.

2. a) Scrivere la definizione di autovettore e di autovalore di un operatore T.

b) Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Dimostrare che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di A se e solo se λ è autovalore di A^{T}.

SOLUZIONE: a) vedi testo di Geometria A, Definizione 13.3.

b) λ è autovalore di $A \iff det(A - \lambda I) = 0 \iff det(A - \lambda I)^{\mathrm{T}} = 0 \iff det(A^{\mathrm{T}} - \lambda I) = 0 \iff \lambda$ è autovalore di A^{T}.

QUARTO TEMA

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Consideriamo le rette r di equazione: $\begin{cases} x+2y+z &= 2 \\ y+z &= 1 \end{cases}$ e s di equazione $\begin{cases} y-3z &= 1 \\ x+y+z &= k \end{cases}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. I valori di $k \in \mathbb{R}$ (se esistono) per i quali r, s sono complanari sono $\boxed{k=1}$.

I vettori direzioni delle rette r ed s sono linearmente dipendenti? $\boxed{no}$ Completare a base di $\mathbb{R}^3$ i vettori direzione di r e s $\boxed{(1,-1,1),(-4,3,1),(1,0,0)}$.

2. Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ data da $L(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y + 3z, y - z, -2x - 4z)$. $\mathrm{rg}(M_L) = \boxed{2}$. KerL $= \boxed{(-2z, z, z)}$. Im$L = \boxed{\mathcal{L}((1, 2, 0, -2),(1, 1, 1, 0))}$.

3. Sia L l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Scrivere la formula di L $\boxed{L(x, y, z) = (x + 2z, y + 2z, x + y + z)}$.
Gli autovalori di L sono $\boxed{1, 3, -1}$. L è diagonalizzabile? $\boxed{si}$.

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(F) Se $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ è un'applicazione lineare, allora $\mathrm{Ker}\, 2L = \{0\}$.

(V) Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ non può essere iniettiva.

(V) Un sistema omogeneo di 5 equazione in 13 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da almeno 8 parametri.

(F) W è un sottospazio vettoriale se $\forall v, w \in W$, vale $v - 2w \in W$.

(F) Se $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare invertibile, allora $m < n$.

(V) Se $A \in M_{n\times m}$ allora $\mathrm{rg}A \leq n$ e $\mathrm{rg}A \leq m$.

(V) Siano $v, w \in \mathbb{R}^6$ linearmente indipendenti. Allora $v + w, v$ sono vettori linearmente indipendenti.

(V) Una matrice di cambiamento di base è invertibile.

1. a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x + z & = 0 \\ x + y + z & = 1 \\ 2x - kz & = k + 1 \end{cases}$ dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema è risolubile e quando possibile scrivere le soluzioni in funzione di k.

SOLUZIONE: il sistema è risolubile e ha soluzione unica per $k \neq -2$. La soluzione in questo caso è $(\frac{k+1}{2+k}, 1, -\frac{k+1}{2+k})$.

2. a) Scrivere la definizione di autovettore e di autovalore di un operatore T.
b) Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Dimostrare che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di A allora λ^2 è autovalore di A^2.

SOLUZIONE: a) vedi testo di Geometria A, Definizione 13.3.
b) Se λ è autovalore di A allora esiste $v \neq O$ con $Av = \lambda v$ e dunque $A(A(v)) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda^2 v$.