Soluzioni dell'esame di GEOMETRIA B - prof. Lucia Alessandrini - 16.9.2009

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(F) Se b è una forma bilineare simmetrica non degenere rappresentata in base canonica dalla matrice A, allora $detA > 0$.

(V) $\mathbb{Z}_9$ non è un campo.

(F) Un operatore su $\mathbb{C}^2$ ha sempre due autovettori linearmente indipendenti.

(F) Ogni matrice normale è invertibile.

(F) Se $(G, *, e)$ è un gruppo abeliano, vale $a^{-1} = a$ per ogni $a \in G$.

(V) Esistono matrici unitarie $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ con $detA = -i$.

(F) Se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una applicazione lineare suriettiva, allora $KerL$ non è formato solo dal vettore nullo.

(V) Le traslazioni non sono applicazioni lineari.

Risolvere per esteso su questo foglio.

1. Sia $G = \{A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix} \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

a) Dimostrare che G è sottogruppo del gruppo additivo delle matrici tre per tre.

b) Sia $f : G \to (\mathbb{R}, +, 0)$ data da $f(A) = a + b - c$. Dire se f è un omomorfismo di gruppi.

SOLUZIONE. a) La matrice nulla appartiene a G; l'inversa di $A \in G$ è $-A$ che sta in G, infatti è ancora antisimmetrica; infine se A, B sono antisimmetriche, anche la loro somma lo è, e quindi sta in G.

b) Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & -z \\ -y & z & 0 \end{pmatrix} \in G$, dunque

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a + x & b + y \\ -a - x & 0 & -c - z \\ -b - y & c + z & 0 \end{pmatrix}$. Risulta $f(A+B) = a+x+b+y-c-z = (a+b-c) + (x + y - z) = f(A) + f(B)$. Dunque f è omomorfismo.

2. Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Scrivere la forma bilineare simmetrica f tale che $M = M_{\mathcal{C}}(f)$ e dire se essa è definita positiva.

b) Determinare i vettori v tali che $f(v, e_1) = 0$.

SOLUZIONE. a) $f((x, y, z), (a, b, c)) = ax + 4by - cz + 3bx - xc + 3ay - cy - az - bz$.

Essa non è definita positiva poiché il primo minore due per due di M non ha determinante positivo.

b) Se $v = (x, y, z)$, $f(v, e_1) = x + 3y - z$, dunque sono i vettori tali che $x + 3y - z = 0$.

3. Scrivere una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $L(2, 1) = (1, 1), L(-1, 0) = (3, 0)$. Essa è unica? Giustificare la risposta. Disegnare il parallelogramma immagine (tramite L) del quadrato unitario.

SOLUZIONE. Se chiamiamo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice associata a L in base canonica, le due condizioni danno un sistema che ha come soluzione $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dunque $L(x, y) = (-3x+7y, y)$. La applicazione lineare è unica perché il sistema ha un'unica soluzione. Il parallelogramma cercato è quello di vertici $(0, 0), (-3, 0), (7, 1), (4, 1)$.

4. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore dato da $L(x, y, z) = (2x - y, -x + y + z, y + 2z)$.
a) Determinare gli autovalori di L. L è diagonalizzabile?
b) Determinare la matrice di L rispetto alla base $\mathcal{B} = (-e_2, e_2 + e_3, 5e_1)$ di $\mathbb{R}^3$.

SOLUZIONE. a) Gli autovalori sono $0, 2, 3$: essi sono distinti e quindi la matrica è diagonalizzabile (si poteva osservare anche che la matrice è simmetrica, e quindi diagonalizzabile).

b) La matrice cercata è $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/5 & -1/5 & 2 \end{pmatrix}$.