Soluzione dell'esame di GEOMETRIA A - prof. L. Alessandrini, prof. L. Biliotti - 16.09.2009

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. La dimensione di $\mathcal{L}((1,-2,1),(1,3,7),(2,1,8))$ è $\boxed{2}$. Scrivere un'equazione cartesiana per $\mathcal{L}((1,-2,1),(1,3,7),(2,1,8))$ $\boxed{17x+6y-5z=0}$. Un piano α passante per $(1,1,1)$ e ortogonale alla retta $r=t(2,-3,9)$ è $\boxed{2x-3y+9z=8}$.

2. Sia $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -(t^2+6) \end{pmatrix}$. Trova per quali valori di t la matrice A_t è diagonalizzabile $\boxed{\textit{tutti}}$.

Trova per quali valori di t la matrice A_t è invertibile $\boxed{\textit{tutti}}$. $(A_t)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7t & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -(t^2+6)^3 \end{pmatrix}$.

3. Siano $v=(1,-1,2,-2,0)$, $w=(1,1,1,0,2)$ e $u=(3,1,4,-2,4)$. Se $u=\lambda v+\mu w$, allora $(\lambda,\mu)=\boxed{(1,2)}$. Il rango della matrice $(v,w,2u)$ è $\boxed{2}$.

$\mathrm{pr}_w(v) = \boxed{(2/7)w}$

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(V) $x^2+5z^2+y^2=2$ è l'equazione di un ellissoide.

(F) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile.

(V) Se v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti, allora anche $2v_1$, v_1-v_2 e v_3 lo sono.

(V) Se $A \in M_{n\times m}$, allora $\mathrm{rg}(A) \le n$.

(V) Una matrice A è singolare se e solo se $\det(A^{\mathrm{T}})=0$.

(V) Se $v,w \in \mathbb{R}^3$, allora $v\times w$ è ortogonale a $v+w$.

(F) $\langle \mathrm{pr}_v(w), \mathrm{pr}_w(v)\rangle = 0$, $\forall v,w \in \mathbb{R}^n$.

(F) 4 vettori in $\mathbb{R}^3$ sono sempre linearmente indipendenti.

Risolvere per esteso sul retro di questo foglio.

1. a) Definizione di base.
b) Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ non nulli e ortogonali fra loro. Dimostrare che essi formano una base.

SOLUZIONE. a) Vedi libro 8.7.

b) Sono due vettori, quindi ci basta provare che sono linearmente indipendenti. Se fosse $v_2 = av_1$, avremmo $0 = v_1\cdot v_2 = v_1\cdot av_1 = a||v_1||$, quindi dovrebbe essere $a=0$ e perciò $v_2=0$.

2. a) Definizione di matrice invertibile.
b) Siano $A,B \in M_{n\times n}$ tale che $A^2B = 3\mathrm{I}_n$. Dimostrare che A è invertibile.

SOLUZIONE. a) Vedi libro 6.4.

b) Non può essere $detA=0$, altrimenti per il teorema di Binet sarebbe $0 = detA^2B = det(3\mathrm{I}_n) \neq 0$.