Svolgimento dell'esame di GEOMETRIA B - prof. Lucia Alessandrini - 2.9.2009

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(V) La superficie quadrica di equazione $x^2 + y^2 - 32 = 0$ è un cilindro.

(V) Il numero 0 può essere autovalore di un operatore simmetrico.

(F) Le righe di una matrice invertibile sono linearmente dipendenti.

(F) Se U e W sono sottospazi dello spazio vettoriale V, allora $dimU \cap W = dimU - dimW$.

(F) $det(-4I_4) < 0$.

(V) La composizione di due isometrie nel piano è una isometria.

(V) Siano $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ due matrici simili. Allora A^7 è simile a B^7.

(V) L'immagine di una applicazione lineare $L : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

Risolvere per esteso su questo foglio.

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, U e W due suoi sottospazi non banali, tali che V è somma diretta di U e W. Sia $g : V \to V$ così definita: se $v = u + w$, allora $g(v) = 2w$.
a) g è un isomorfismo? Giustificare la risposta.
b) Se $V = \mathbb{R}^3$, $U = \mathcal{L}((2, 0, 1))$ e $W = \{(x, y, z)/x + y = 0\}$, calcolare $g(4, 0, 2)$ e $g(1, 1, 1)$.
SOLUZIONE. a) No, poiché tutti i vettori di U vanno nel vettore nullo, dunque g non è iniettiva.
b) $(4, 0, 2) = 2(2, 0, 1) \in U$ dunque $g(4, 0, 2) = O$. Gli elementi di W sono del tipo $(x, -x, z)$, per cui $(1, 1, 1) = u + w = k(2, 0, 1) + (x, -x, z)$ da cui si ricava che $w = (-1, 1, 0)$ e quindi $g(1, 1, 1) = (-2, 2, 0)$.

2. Considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
a) L'operatore che essa rappresenta su $\mathbb{R}^4$ è ortogonale? Giustificare la risposta.
b) Diagonalizzare A, se possibile, oppure spiegare perché non lo è.
SOLUZIONE. a) Non è ortogonale, altrimenti tutte le colonne di A dovrebbero avere norma uno, ed essere a due a due ortogonali.
b) Non è possibile diagonalizzare, poiché la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 è due, quella geometrica è uno.

3. Studiare la quadrica di equazione $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x + 2z = 0$.
SOLUZIONE. Dato che $rgM = 4, rgA = 3, (p, n) = (3, 0)$, può essere un ellissoide o il vuoto; questo ultimo caso si può escludere controllando che il punto $(2, 0, 0)$ sta sulla quadrica. Per scriverla in forma canonica, basta la traslazione, con $(u, v, w) = (1, 0, -1/3)$; risulta l'equazione $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4/3$.

4. Sia $T : V \to V$ un operatore simmetrico sullo spazio euclideo $(V, \langle , \rangle)$, e sia v un suo autovettore. Dimostrare che se $w \in V$ è ortogonale a v, allora anche $T(w)$ è ortogonale a v. Provare con un controesempio che ciò è falso se l'operatore T non è simmetrico.
SOLUZIONE. Sia λ l'autovalore di v. Si ha, usando nel primo passaggio la simmetria di T

$$\langle T(w), v\rangle = \langle w, T(v)\rangle = \langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle = 0.$$

Per dare un controesempio, consideriamo l'operatore T su $\mathbb{R}^2$ rappresentato in base canonica dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. T non è simmetrico perché A non lo è. Gli autovalori sono 1 e 2; ed è facile verificare che $v = (1, -2)$ è autovalore di 1. Scegliamo w ortogonale a v come $w = (2, 1)$: si ha $T(w) = Aw = (2, 6)$, che non è ortogonale a v.