RISULTATI dell'esame di GEOMETRIA B - prof. Lucia Alessandrini - 13.7.2009

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(F) La superficie quadrica di equazione $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ è un cono.

(V) Se due matrici rappresentano lo stesso operatore, allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

(F) Un operatore è diagonalizzabile se e solo se i suoi autovalori sono tutti distinti.

(V) L'applicazione $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $b((x, y, z), (a, b, c)) = cx + cy + cz$ è una forma bilineare.

(F) Quattro vettori non nulli non possono mai generare $\mathbb{R}^3$.

(V) Sia $A \in M_{m\times n}$, allora $rgA \leq n$.

(V) Sia A una matrice quadrata. Allora A è invertibile se e solo se A^2 è invertibile.

(F) Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una applicazione lineare: per ogni $v \in KerL$ vale $L(v) = v$.

Risolvere per esteso su questo foglio.

1. Sia $<, >$ la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ data, in base canonica, da $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Dimostrare che $<, >$ è definita positiva.
b) Se $W = \mathcal{L}((1, -1, -1))$, calcolare $W^\perp$ rispetto a $<, >$.
SOLUZIONE. a) $det(3) > 0$, $det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0$, $det(A) > 0$.
b) $W^\perp = \{(x, y, z)/ < (1, -1, -1), (x, y, z) >= 0\} = \{(1, -1, -1)A(x, y, z)^T = 0\} = \{2x - 2y - 5z = 0\}$.

2. a) Dare un esempio di un gruppo non abeliano che abbia un sottogruppo (non formato solo dall'elemento neutro) abeliano, oppure spiegare perché ciò non è possibile.
b) Dare un esempio di un omomorfismo fra un gruppo non abeliano e un gruppo abeliano, oppure spiegare perché ciò non è possibile.
c) Dare un esempio di un isomorfismo fra un gruppo non abeliano e un gruppo abeliano, oppure spiegare perché ciò non è possibile.
SOLUZIONE. a) $GL(n, \mathbb{R})$ è un gruppo moltiplicativo non abeliano che ha come sottogruppo abeliano quello delle matrici diagonali invertibili.
b) Il determinante è un omomorfismo di gruppi da $GL(n, \mathbb{R})$ a $(\mathbb{R}^*, \cdot, 1)$.
c) Non è possibile, perché se un gruppo G non è abeliano, contiene due elementi a, b che non commutano. Se $f : H \to G$ è un isomorfismo, con H abeliano, si ha $a = f(x), b = f(y)$ e dunque $ab = f(x)f(y) = f(xy) = f(yx) = f(y)f(x) = ba$, assurdo.

3. Siano $W = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \ / \ a_{ii} = 0 \ \forall i\}$ e $S = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \ / \ {}^tA = A\}$.
a) Dire se W e S sono sottospazi di $M(n \times n, \mathbb{R})$ e giustificare le risposte.
b) Dire se $M(n \times n, \mathbb{R}) = W \oplus S$ e giustificare la risposta.
SOLUZIONE. a) Sia W che S sono sottospazi vettoriali, per esempio per S, che è l'insieme delle matrici simmetriche, vale: O è simmetrica, se A e B sono simmetriche, ${}^t(A+B) = ({}^tA)+({}^tB) = A+B$ e ${}^t(cA) = c({}^tA) = cA$.
b) Non è vero poiché $W \cap S \neq O$, ci sono molte matrici simmetriche a diagonale nulla.

4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $F(x, y, z) = (2x, x - y, y - z)$.
a) Determinare la matrice di $F \circ F$ rispetto alla base canonica. $F \circ F$ è invertibile? $F^{-1} = F$? Giustificare le risposte.
b) Diagonalizzare F, se possibile, oppure spiegare perché non è possibile.

SOLUZIONE. a) La matrice cercata è $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $F \circ F$ è invertibile perché $det A = 4 \neq 0$, ma $F^{-1} = F$ è falso, essendo $A \neq I_3$.

b) Non è possibile poiché la molteplicità algebrica dell'operatore -1 è 2, la sua molteplicità geometrica è 1.