Soluzioni dell'esame di GEOMETRIA B - prof. Lucia Alessandrini - 15 giugno 2009

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(F) Ogni sistema omogeneo con più equazioni che incognite ha infinite soluzioni.

(F) Il numero 0 non può essere autovalore di un operatore simmetrico.

(V) Le righe di una matrice invertibile sono linearmente indipendenti.

(F) Se U e W sono sottospazi dello spazio vettoriale V, allora $dimU \cap W = dimU - dimW$.

(V) $det(-9I_9) < 0$.

(V) La composizione di due rotazioni nel piano è una isometria.

(V) Siano $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ due matrici simili. Allora A^2 è simile a B^2.

(F) L'immagine di una applicazione lineare $L : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

Risolvere per esteso su questo foglio.

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, U e W due suoi sottospazi non banali, tali che V è somma diretta di U e W. Sia $g : V \to V$ così definita: se $v = u + w$, allora $g(v) = u - w$.
a) Dimostrare che g è una applicazione lineare.
b) g è un isomorfismo? Giustificare la risposta.
c) Se $V = \mathbb{R}^3$, $U = \mathcal{L}((2, 0, 1))$ e $W = \{(x, y, z)/x + y - z = 0\}$, calcolare $g(4, 0, 2)$ e $g(1, 1, 1)$.

SOLUZIONE. a) e b): Scelgo una base $\mathcal{B}$ di V formata dall'unione di due basi, $\mathcal{B}'$ di U e $\mathcal{B}''$ di W; risulta $M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix}$, come si verifica facilmente. Dunque g è una applicazione lineare ed è un isomorfismo, perché la matrice è invertibile.
c) $g(4, 0, 2) = (4, 0, 2)$ poiché $(4, 0, 2) \in U$ e $g(1, 1, 1) = (3, -1, 1)$, che ottengo così: scelgo $v_1 = (2, 0, 1)$ base di U e $v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, -1, 0)$ base di W, esprimo $(1, 1, 1)$ in questa base, applico la matrice e ritrasformo in base canonica il risultato.

2. Studiare la quadrica di equazione $x^2 + 2x - 3z + 1 = 0$ e determinare cosa si ottiene intersecando la quadrica con il piano $z = 0$.

SOLUZIONE. Con il solito studio (basta la parte di traslazione, perché la matrice A è diagonale) ottengo il cilindro parabolico di equazione $x^2 - 3z = 0$. L'intersezione col piano dato è una retta, $x + 1 = 0$.

3. Sia $\mathcal{F}$ lo spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e sia $W = \mathcal{L}(1, \cos x, x^2 - 1, 3x)$.
a) Calcolare la dimensione di W e una sua base.
b) Scrivere un sottospazio vettoriale U di $\mathcal{F}$, con $dimU = 2$ e $U \cap W = \mathbb{R}$, e giustificare la risposta.

SOLUZIONE. a) Si verifica che i generatori di W sono anche linearmente indipendenti, quindi sono una sua base e la dimensione di W è 4.
b) Per esempio $U = \mathcal{L}(1, x^3)$ soddisfa le richieste: i suoi generatori sono una base (si dimostra come sopra) e quindi $dimU = 2$; inoltre l'intersezione è $\mathcal{L}(1) = \mathbb{R}$.

4. Costruire la tavola di moltiplicazione di $(\mathbb{Z}_5, \cdot, \overline{1})$.
$(\mathbb{Z}_5, \cdot, \overline{1})$ è un gruppo abeliano? Quali sono i suoi elementi invertibili? Giustificare le risposte.
Trovare due numeri interi m e n compresi fra 1 e 4 tali che il prodotto delle loro classi in $\mathbb{Z}_5$ sia diverso da quello in $\mathbb{Z}_6$.

SOLUZIONE. Togliendo $\overline{0}$, $(\mathbb{Z}_5, \cdot, \overline{1})$ è un gruppo abeliano, e i suoi elementi invertibili sono $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$; questi dati si ricavano dalla tavola di moltiplicazione, che comprende anche $\overline{0}$. (Mi scuso per l'imprecisione della domanda). Inoltre $\overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{2}$ in $\mathbb{Z}_5$, mentre $\overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{0}$ in $\mathbb{Z}_6$.