Esame di GEOMETRIA A - prof. L. Alessandrini, prof. L. Biliotti - 02.09.2009

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Siano r ed s le rette di equazione parametrica rispettivamente $X = (2,0,1) + t(1,0,-1)$ e $X = (2,2,-1)+t(1,2,-3)$. r e s si intersecano nel punto $P = \boxed{(1,0,2)}$. La distanza fra P e $(1,1,1)$ è $\boxed{\sqrt{2}}$. Un piano che contiene r ed s è $\boxed{x+y+z-3=0}$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. L'applicazione L_A associata a A è $L_A(x,y,z) = \boxed{(x-2y, x-y+2z)}$. L_A è suriettiva? $\boxed{si}$. Scrivere, se esiste, $L_A \circ L_{A^{\mathrm{T}}} = \boxed{(5x+3y, 3x+6y)}$

3. Siano $v = (1,2,1)$ e $w = (1,1,1)$. $\{v+2w\}^{\perp} = \boxed{\{3x+4y+3z=0\}}$. $v \times w = \boxed{(1,0,-1)}$. Completare a base di $\mathbb{R}^3$ i vettori v e w $\boxed{v, w, e_1}$.

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

- (F) $x^2 + 5z^2 - y^2 = 2$ è l'equazione di un ellissoide.
- (V) Se $A \in M_{2\times 2}$ ha coefficienti interi, allora $\det(A)$ è razionale.
- (V) Se A rappresenta una riflessione del piano, allora $\det(A) = -1$
- (V) Due rette sghembe non non possono giacere su uno stesso piano.
- (F) Se A, B sono matrici ortogonali, allora $\det(A - B^{\mathrm{T}}) = 1$.
- (F) Se $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è iniettiva, allora $n = m - 1$.
- (F) $\langle \mathrm{pr}_v(w), w \rangle = 0$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$.
- (F) $\mathcal{L}((1,1,1),(2,0,1),(4,2,3)) = \mathbb{R}^3$.

Risolvere per esteso sul retro di questo foglio.

1. a) Definizione di base ortonormale.
b) Sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che se $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$, allora $x_i = \langle v, v_i \rangle$ per $i = 1, \ldots, n$.
SOLUZIONE. a) vedi libro, definizione 8.7.
b) Sfruttando la definizione di base ortonormale si ha $\langle v, v_i \rangle = \langle x_1v_1 + \cdots + x_nv_n, v_i \rangle = x_i \langle v_i, v_i \rangle = x_i$.

2. Al variare di $k, b \in \mathbb{R}$, studia il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y + kz & = & 1 \\ 2x + ky + 8z & = & -1 \\ 4x + 7y + z & = & b. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Sia A la matrice 3×3 del sistema: si calcola che $detA = 0$ solo se $k = 4$ oppure $k = -1/4$: esclusi questi due casi, il sistema ha una unica soluzione. Gli altri due casi si fanno sostituendo: per $k = 4$ il sistema non ha soluzione, per $k = -1/4$ si ricava che il sistema non ha soluzione se $b \neq 56/17$ e ha infinite soluzioni se $b = 56/17$.