SOLUZIONI della prova parziale di GEOMETRIA B - prof. L. Alessandrini - 8 gennaio 2009

PRIMO TEMA

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(F) m è un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$ se e solo se $m(X) = AX,\ A \in SO(3)$.

(F) Per le traslazioni vale $t_v + t_w = t_{v+w}$.

(V) $X(t) = (3e^{3t}, 0)$ risolve il sistema $\frac{dX}{dt} = AX$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(V) $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ è l'equazione di un'ellissoide.

(V) Se v è autovettore dell'operatore T, allora anche $2v$ è autovettore dell'operatore T.

(V) Se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ sono due matrici simili, allora $rgA = rgB$.

(V) Tutte le matrici hermitiane sono diagonalizzabili.

(F) Ogni forma bilineare simmetrica definita positiva su uno spazio vettoriale di dimensione n ha segnatura (n, n).

1. Considerare la forma bilineare b su $\mathbb{R}^4$ rappresentata da $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Trovare una condizione sui vettori $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ perche' sia $b(v, v) > 0$.
b) b è diagonalizzabile? b è non degenere? Giustificare le risposte.

SOLUZIONE. a) $f(v, v) = (x, y, z, t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (x, y, z, t)^T = 2xz - 2yt$ perciò la condizione è $xz > yt$.
b) b è diagonalizzabile poiche' la matrice A è simmetrica. b è non degenere poiche' $detA \neq 0$.

2. Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio euclideo, W_1, W_2 suoi sottospazi.
a) Dimostrare che se $W_1 \subseteq W_2$, allora $W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$.
b) Considerare su $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare dato, in base canonica, dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; calcolare $(\mathcal{L}(1, 1, 1))^\perp$.

SOLUZIONE. a) Siano $u_2 \in W_2^\perp, w_1 \in W_1$: per ipotesi, vale anche $w_1 \in W_2$ e dunque $\langle u_2, w_1\rangle = 0$ dunque $u_2 \in W_1^\perp$.
b) $(\mathcal{L}(1, 1, 1))^\perp = \{(x, y, z)/(x, y, z) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} (1, 1, 1)^T = 0\} = \{(x, y, z)/x + y + 2z = 0\}$.

3. Studiare la quadrica di equazione $y^2 + 4xz + 3x + 2y - 2z - 1 = 0$.

SOLUZIONE. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 3/2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ per cui $rgM = 4, rgA = 3$. Gli autovalori di A sono $2, 1, -2$ dunque $|pos - neg| = 1$: si tratta quindi di un iperboloide. Una base ortonormale ricavata dagli autospazi è $((\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0,1,0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}))$, quindi $M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1/2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 1 & 5/2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$.

Il vettore di traslazione è $(\frac{-1}{4\sqrt{2}}, -1, \frac{5}{4\sqrt{2}})$, per cui la matrice diagonale è $M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.
La quadrica perciò è un iperboloide a una falda di equazione $2x^2 + y^2 - 2z^2 - 1/2 = 0$.

4. Sia L l'operatore su $\mathbb{R}^2$ dato da $L(x, y) = (x + 10^{-1}y, 10^{-2}x + 10^{-3}y)$.
a) Determinare una matrice $P \in GL(2)$ che diagonalizza L.
b) E' possibile scegliere $P \in O(2)$? Giustificare la risposta.

SOLUZIONE. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-1} \\ 10^{-2} & 10^{-3} \end{pmatrix}$; i suoi autovalori (che danno la matrice diagonale) sono $0, 1 + 10^{-3}$; la matrice P che diagonalizza ha nelle colonne una base di autovettori, per esempio $P = \begin{pmatrix} 100 & -1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$.
b) A non è normale, e quindi non può essere diagonalizzata in base ortonormale; dunque non posso scegliere $P \in O(2)$.

SECONDO TEMA

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(F) $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ é l'equazione di un cono.

(F) Se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sono due matrici congruenti, allora $detA = detB$.

(V) Tutte le matrici unitarie sono diagonalizzabili.

(V) Ogni forma bilineare simmetrica definita positiva su uno spazio vettoriale di dimensione n ha segnatura $(n, 0)$.

(F) m è un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$ se e solo se $m(X) = AX,\ A \in O(3)$.

(V) Per le traslazioni vale che t_v composto con t_w è t_{v+w}.

(V) $X(t) = (3e^{3t}, 0)$ risolve il sistema $\frac{dX}{dt} = AX$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(V) Se v è autovettore dell'operatore T, allora $2v$ è autovettore dell'operatore $2T$.

1. Sia L l'operatore su $\mathbb{R}^2$ dato da $L(x, y) = (x + 10^{-1}y, 10^{-2}x + 10^{-3}y)$.
a) Determinare una matrice $P \in GL(2)$ che diagonalizza L.
b) E' possibile scegliere $P \in O(2)$? Giustificare la risposta.

SOLUZIONE. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-1} \\ 10^{-2} & 10^{-3} \end{pmatrix}$; i suoi autovalori (che danno la matrice diagonale) sono $0, 1 + 10^{-3}$; la matrice P che diagonalizza ha nelle colonne una base di autovettori, per esempio $P = \begin{pmatrix} 100 & -1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$.
b) A non è normale, e quindi non può essere diagonalizzata in base ortonormale; dunque non posso scegliere $P \in O(2)$.

2. Considerare la forma bilineare b su $\mathbb{R}^4$ rappresentata da $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Trovare una condizione sui vettori $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ perche' sia $b(v, v) > 0$.
b) b è diagonalizzabile? b è non degenere? Giustificare le risposte.

SOLUZIONE. a) $f(v, v) = (x, y, z, t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (x, y, z, t)^T = -2xz - 2yt$ perciò la condizione è $xz < -yt$.

b) b è diagonalizzabile poiche' la matrice A è simmetrica. b è non degenere poiche' $detA \neq 0$.

3. Studiare la quadrica di equazione $y^2 + 4xz + 3x + 2y - 2z - 1 = 0$.

SOLUZIONE. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 3/2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ per cui $rgM = 4, rgA = 3$. Gli autovalori di A sono $2, 1, -2$ dunque $|pos - neg| = 1$: si tratta quindi di un iperboloide. Una base ortonormale ricavata dagli autospazi è $((\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}))$, quindi $M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1/2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 1 & 5/2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$.

Il vettore di traslazione è $(\frac{-1}{4\sqrt{2}}, -1, \frac{5}{4\sqrt{2}})$, per cui la matrice diagonale è $M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

La quadrica perciò è un iperboloide a una falda di equazione $2x^2 + y^2 - 2z^2 - 1/2 = 0$.

4. Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio euclideo, W un suo sottospazio.

a) Dimostrare che $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$.

b) Considerare su $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare dato, in base canonica, dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; calcolare $(\mathcal{L}(1, 1, 1))^{\perp}$.

SOLUZIONE. a) Siano $u \in W^{\perp}, w \in W$: per ipotesi, $\langle u, w \rangle = 0$ dunque $w \in (W^{\perp})^{\perp}$.

b) $(\mathcal{L}(1, 1, 1))^{\perp} = \{(x, y, z)/(x, y, z) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1, 1, 1)^T = 0\} = \{(x, y, z)/4x + 3y + z = 0\}$.